Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #5

1. Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$ της υποομάδας $H \leq G$ όταν $H = n\mathbb{Z}$ και $G = \mathbb{Z}$.

2. Βρείτε τον δείκτη $[G : H]$ της υποομάδας $H \leq G$ όταν $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}.$$

3. Έστω ότι $(G, *)$ είναι πεπερασμένη ομάδα, και H, K δύο υποομάδες της G.
   (α΄) Υποθέτουμε ότι η τάξη της H είναι πρώτος αριθμός p που δεν διαιρεί την τάξη της K. Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.
   (β΄) Υποθέτουμε ότι οι ομάδες H, K έχουν τάξη τον ίδιο πρώτο αριθμό p και $H \neq K$. Δείξτε ότι $H \cap K = \{e\}$.

4. Βρείτε υποομάδα H της πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ έτσι ώστε $[\mathbb{R}^* : H] = 2$.

5. Έστω G ομάδα με τάξη $\#G < 300$ η οποία έχει δύο υποομάδες H, K με τάξεις $\#H = 24$ και $\#K = 54$. Βρείτε την τάξη της G.

6. Έστω $(G, *)$ ομάδα και $a, b \in G$ στοιχεία πεπερασμένης τάξης με την ιδιότητα $a * b = b * a$. Υποθέτουμε ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των $\mathrm{ord}(a)$ και $\mathrm{ord}(b)$ είναι 1. Δείξτε ότι
$$\mathrm{ord}(a * b) = \mathrm{ord}(a) \cdot \mathrm{ord}(b).$$

7. Έστω G πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Θέτουμε
$$M = \{ \mathrm{ord(a) : a \in G} \}.$$
Έστω m το μέγιστο στοιχείο του M. Δείξτε ότι $a^m = e_G$ για κάθε $a \in G$. Επιπλέον, δείξτε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν $G = \mathrm{S}_3$.

8. Έστω ότι p, q είναι πρώτοι αριθμοί, και $(G, *)$ μια ομάδα. Να δειχθεί ότι:
   (α΄) Αν η τάξη της G είναι pq, τότε κάθε γνήσια υποομάδα H της G είναι κυκλική.
   (β΄) Αν η G είναι αβελιανή με τάξη pq και $p \neq q$, τότε η G είναι κυκλική.
   (γ΄) Υπάρχουν αβελιανές ομάδες τάξης p^2 που δεν είναι κυκλικές.

9. Έστω G μια (όχι απαραίτητα πεπερασμένη) ομάδα και H, K δύο υποομάδες της G με $K \leq H$. Αν ο δείκτης $[G : K]$ είναι πεπερασμένος, τότε να δειχθεί ότι οι δείκτες $[G : H]$ και $[H : K]$ είναι πεπερασμένοι και ισχύει ότι
$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$$